מועד א', סמסטר אביב תשפ"א - אלגברה 1/מ, 104016
5.7.21

ת"ז :

פקולטה :

- משך המבחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **בשאלות 1-3** יש **לנמק** היטב כל תשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב**.
בשאלות 4-8 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון. אם תסומן יותר מתשובה אחת השאלה תיפסל.
- **אין לתת נימוקים בשאלות 4-8.**
- שאלת ש"ב (המהווה גם 5% מגן) היא 3-א'.

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 4-8

	שאלה 4	שאלה 5	שאלה 6	שאלה 7	שאלה 8
א.					
ב.					
ג.					
ד.					
ה.					

<u>שאלה מס' 1</u> : (24 נקודות)

תהי $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י:

$$T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix} a+b+c+d & -a+c+2d \\ b+2c+3d & 3a+3b+3c+3d \end{pmatrix}$$

א. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ב. (5 נק') מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

ג. (5 נק') מצאו מטריצה בתמונה של T שהיא בעלת דטרמיננטה השווה ל- 27.

ד. (5 נק') תהי $S:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ ההעתקה הלינארית המוגדרת ע"י $S(A)=A-A^t$.
הוכיחו כי כל מטריצה שונה מ- 0 ב $\mathrm{Im}(S\circ T)$ היא הפיכה.

ה. (4 נק') מצאו מטריצה מייצגת של $2S+3I$ לפי הבסיס הסטנדרטי E של $\mathbb{R}^{2\times 2}$
(I היא העתקת הזהות על $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ו- S היא ההעתקה מסעיף ד'):

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>שאלה מס' 2</u> : (20 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

א. (5 נק') מצאו את הפולינום האופייני של A, את הערכים העצמיים ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ב. (10 נק') הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP=D$.

ג. (5 נק') האם קיימים ערכים של $x,y,z,w\in\mathbb{R}$ כך שהמטריצה $C=\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & w & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ דומה ל- A.
אם כן, מצאו את התנאים על x,y,z,w. אם לא, נמקו מדוע לא קיימים.

בשאלה זו יש לתת פתרון מלא ובסוף לרכז את התשובות במשבצות המתאימות בסוף השאלה.

א. פולינום אופייני:

ע"ע	ר"א	ר"ג

ב. A לכסינה כי:

$D=$ $P=$

ג. התנאים על $x, y, z, w \in \mathbb{R}$

<u>שאלה מס' 3</u> : (31 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב.**

בשאלה זו 4 סעיפים. הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. (10 נק') אם $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ כך ש $\det(A) > 0$ אז $trace(A) \in \mathbb{R}$.

ב. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה $\mathbb{R}$, ויהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי המקיים $T^2 = 0$.
אם $v \notin KerT$ אז הקבוצה $\{v, T(v)\}$ בלתי תלויה ליניארית.

ג. (7 נק') תהי $M \in \mathbb{R}^{3\times3}$ ויהי $T:\mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}^{3\times3}$ אופרטור לינארי המוגדר ע"י $T(A) = MA$.

אזי, T הפיך אם"ם M הפיכה.

ד. (7 נק') אם $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ לכסינות מעל $\mathbb{R}$ אז גם $A+B$ לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

<u>יש לסמן את התשובה הנכונה לשאלות 4-8 בטבלה שבדף הראשון. נימוקים לא יבדקו.</u>
<u>יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על השאלה.</u>

<u>שאלה מס' 4</u> : (5 נקודות)

יהי $z \neq 1$ שורש יחידה מסדר 3, ויהי $w=(z+1)^2(2z^2+z+1)$, אזי :

א. $w=-1$; ב. $w=1+z$; ג. w מדומה טהור ; ד. $w=1$; ה. $w=16$

<u>שאלה מס' 5</u> : (5 נקודות)

יהי $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2 מעל $\mathbb{R}$, ויהי W תת המרחב הבא של V :

$$W=\{A\in V \mid trace(A)=0\}$$

אזי :

א. קיים בסיס של W המורכב מ- 2 מטריצות סימטריות ו- 2 מטריצות אנטי סימטריות.

ב. קיים בסיס של W המורכב ממטריצה סימטרית אחת ו- 2 מטריצות אנטי סימטריות.

ג. קיים בסיס של W המורכב ממטריצה סימטרית אחת ומטריצה אנטי סימטרית אחת.

ד. כל בסיס של W מכיל לפחות מטריצה סימטרית אחת.

ה. כל בסיס של W מכיל לפחות מטריצה אנטי סימטרית אחת.

<u>שאלה מס' 6</u> : (5 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה F, ויהיו A , B שתי תתי קבוצות לא ריקות של וקטורים ב V . אזי:

א. אם $A\cap B=\emptyset$ אז $span\{A\}\cap span\{B\}=\{0\}$.

ב. אם $A\cap B=\emptyset$ אז $V=span\{A\}\oplus span\{B\}$.

ג. אם $A\subset span\{B\}$ וגם $B\subset span\{A\}$ אז $A=B$.

ד. אם A ו- B בלתי תלויות ליניארית אז $span\{A\cup B\}=span\{A\}\cup span\{B\}$.

ה. אם $A\subset B$ אז $span\{A\cup B\}=span\{A\}\cup span\{B\}$.

<u>שאלה מס' 7</u> : (5 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה $\mathbb{R}$ ויהי $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ בסיס של V. יהי $T:V\to V$ האופרטור הלינארי המוגדר ע"י :

$$\begin{cases} T(v_1)=v_1-v_2 \\ T(v_2)=v_1-v_3 \\ T(v_3)=v_2+v_3 \end{cases}$$

יהי $C=\{2v_1+v_2,v_1+v_2,v_3\}$, אזי סכום כל האיברים בשורה הראשונה של $[T]_C$ הוא :

א. 7 ; ב. -3 ; ג. 2 ; ד. -1 ; ה. 3 .

<u>שאלה מס' 8</u> : (5 נקודות)

תהי $A=\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$ פרמטר.

אזי:

א. A לא לכסינה מעל $\mathbb{C}$ לכל α.

ב. A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ לכל α.

ג. אם A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ אז $\alpha > 0$.

ד. קיימים בדיוק 2 ערכים שונים של α עבורם A לא לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

ה. קיים בדיוק ערך אחד של α עבורו A לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

דף ריק למקרה הצורך